

旋转坐标系中可压缩湍流 的基本方程和湍流模型

中国科学院科能新技术开发部 华耀南

【摘要】 本文在可压缩湍流瞬时量基本方程的基础上,用质量加权平均的概念,推导了旋转坐标系中可压湍流流动的连续方程、动量方程和能量方程。进而导出了旋转坐标系中可压湍流的应力输运方程、脉动平均动能方程和湍流耗散率输运方程。这些方程中包括了由旋转引起的 Coriolis 力和离心力的作用项。这些方程是在旋转坐标系中研究平均 $N-S$ 方程求解湍流流场和研究湍流模型的基础。本文还以综述形式讨论了五种湍流模型及其数学表达式和在旋转坐标系中的修正形式。

一、前 言

高性能叶轮机械的设计和计算,必然要求从无粘流模型到粘性流模型的转变。叶轮机械的最大特点是高速旋转,由于高速旋转产生的 Coriolis 力和离心力会对粘性流动(一般说来,在叶轮机械中都是湍流流动)产生多大的影响,是值得研究的。

H. Koyama^[1]的实验说明,旋转明显影响边界层的稳定性。同时测得旋转对壁面摩擦数也有很大影响。因此,有必要深入系统地研究旋转的影响。国内外,对旋转湍流及其模型的理论和实验研究上的确做了不少工作,文献[2]在旋转坐标系中推得不可压湍流流动的基本方程,并指出在 k 和 ϵ 方程中不含 Coriolis 力和离心力的作用项。文献[3]求解旋转坐标系中的 S_i 流面上的边界层参数。

但一般文献中都是讨论不可压湍流情况,本文用质量加权平均的概念,推导得出形式上与不可压情况类似的可压湍流的基本方程。这些方程中包含了由旋转引起的 Coriolis 力和离心力的作用项。与在不可压情况下得出的结论不同。由于可压湍流存在密度的脉动量,除在湍流应力输运方程中出现 Coriolis 力和离心力的作用项以外,在 k 和 ϵ 方程中也同样存在这些力的作用项。本文推导得到的可压湍流的方程中含有大量脉动相关量的项,必须进行模拟,建立它们与平均量和已知量的关系。这方面的工作大多仿照不可压的情况进行。但推导得出的可压湍流的方程,是旋转坐标系中研究平均 $N-S$ 方程求解湍流流场和研究湍流模型的基础。特别是通过大量的实验数据,就可得到更为准确的模拟形式,从而可精雕细刻地创造出符合实际情况的简化方程和湍流模型的数学表达式。所以这方面的工作是有实际意义的。

本文对旋转湍流模型的研究,仅仅是带有文献综述性质的。对湍流模型创造性的发展,必须建立在可靠准确的实验数据的基础上。本文综述了五种湍流模型及其数学表达式和在旋转坐标系中的修正形式,可供进行数值计算模拟时参考选择。

二、可压缩湍流流动基本方程

1. 旋转坐标系中可压缩粘性流体力学基本方程

$$\text{连续方程} \quad (\partial \rho / \partial t) + (\partial \rho u_i / \partial x_i) = 0 \quad (1)$$

$$\text{动量方程} \quad (\partial / \partial t)(\rho u_i) + (\partial / \partial x_j)(\rho u_j u_i) = (-\partial p / \partial x_i) + (\partial \tau_{ij} / \partial x_j) + \rho f_i \quad (2)$$

$$\text{其中} \quad \tau_{ij} = \mu(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) - 2/3\mu(\partial u_k / \partial x_k)\delta_{ij}$$

$$f_i = -2e_{ijk}\omega u_k + (\partial / \partial x_i)(\omega^2 r^2 / 2)$$

上式中 e_{ijk} 是单位循环系数, 除非 $i \neq j \neq k$, 否则 $e_{ijk} = 0$, 假如 $\bar{i}jk$ 依正循环序排列 (123, 231, 312), $e_{\bar{i}jk} = 1$, 假如 $\bar{i}jk$ 依逆循环序排列 (321, 213, 132), 则 $e_{\bar{i}jk} = -1$ 。

对湍流, 方程式 (2) 中的各物理量表示瞬时量。

$$\text{能量方程} \quad (\partial \rho I / \partial t) + (\partial x_j)(\rho I u_j) = (\partial p / \partial t) + (\partial x_j)(u_i \tau_{ij}) + (\partial / \partial x_j) [\rho T / \partial x_j] \quad (3)$$

式中 $I = C_p T + (w^2 - \omega^2 r^2) / 2$ 为滞止转子焓。如要引入熵 s 作为气动参数, 则:

$$T(ds/dt) = (du/dt) + p(dv/dt) = (1/\rho) \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + (\Phi/\rho) \quad (4)$$

2. 旋转坐标系中的质量加权平均方程 任一瞬时物理量都可用平均值和脉动量和代替:

$$A = \bar{A} + A' \quad (5)$$

我们用上标 “~” 表示质量加权平均值, 定义:

$$\tilde{A} = \rho A / \bar{\rho}, \quad A' = \tilde{A}' + A'' \quad (6)$$

A'' 表示质量加权平均值的脉动量。对不可压, 显然有: $A' = A''$, $\tilde{A}' = \tilde{A}$ 。

如对各基本方程式中包含密度的项取质量加权平均值, 不含密度的项仍取一般的时间平均量 (包括密度本身取一般时间平均量)。然后对各方程进行时间平均, 则可得与 (1) (2) (3) 式对应的可压缩湍流运动的质量加权平均的基本方程:

$$\partial \bar{\rho} / \partial t + \partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i) / \partial x_i = 0 \quad (1a)$$

$$\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i) / \partial t + (\partial / \partial x_j)(\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i) = -(\partial \bar{p} / \partial x_i) + (\partial / \partial x_j)(\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_i u_j}) + (\bar{\rho} f_i) \quad (2a)$$

上式中 $\bar{\tau}_{ij} = \mu(\partial \tilde{u}_j / \partial x_i + \partial \tilde{u}_i / \partial x_j) - 2/3\mu(\partial \tilde{u}_k / \partial x_k)\delta_{ij}$, $-\overline{\rho u_i u_j}$ 是平均的脉动动量引起的附加项, 称为湍流应力或 Reynolds 应力。令 μ_t 为湍流应力粘性系数 (涡粘系数), 应用 Boussinesq 类比:

$$-\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t(\partial \tilde{u}_j / \partial x_i + \partial \tilde{u}_i / \partial x_j) - 2/3\mu_t(\partial \tilde{u}_k / \partial x_k)\delta_{ij} \quad (7)$$

$$(2a) \text{ 式为: } (\partial / \partial t)(\bar{\rho} \tilde{u}_i) + (\partial / \partial x_j)(\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i) = -\partial \bar{p} / \partial x_i + (\partial / \partial x_j)\bar{\tau}_{ij} + \bar{\rho} f_i \quad (2b)$$

$$\text{式中} \quad \bar{\tau}_{ij}^* = (\mu + \mu_t)(\partial \tilde{u}_j / \partial x_i + \partial \tilde{u}_i / \partial x_j) - 2/3(\mu + \mu_t)(\partial \tilde{u}_k / \partial x_k)\delta_{ij}$$

$$\partial \bar{\rho} T / \partial t + (\partial / \partial x_j)(\bar{\rho} \tilde{u}_j T) = \partial \bar{q} / \partial t + (\partial / \partial x_j)(\tilde{u}_j \bar{\tau}_{ij} + \overline{\rho u_i T}) + (\partial / \partial x_j) [\mu C_p / P_r (\partial T / \partial x_j) - \overline{\rho I u_j}] \quad (3a)$$

将附加的湍流脉动能量项 $-\overline{\rho I u_j}$ 与平均量进行关联: $-\overline{\rho I u_j} = C_p \mu_t / P_{rt} \partial T / \partial x_j$, 式中 P_{rt} 为湍流 Prandtl 数。我们再假定: $\tilde{u}_i \bar{\tau}_{ij} + \overline{\rho u_i T} \approx \bar{\tau}_{ij}^*$, 则可将方程 (3a) 写成:

$$\partial \bar{\rho} T / \partial t + (\partial / \partial x_j)(\bar{\rho} \tilde{u}_j T) = \partial \bar{q} / \partial t + (\partial / \partial x_j)(\tilde{u}_j \bar{\tau}_{ij}^*) + (\mu / p_r + \mu_t / P_n) \cdot \gamma R / (\gamma - 1) (\partial T / \partial x_j) \quad (3b)$$

3. 旋转坐标系中可压湍流应力输运方程和脉动平均动能方程 用 u_i 乘式 (2) 的 i 方向方程, 用 u_i 乘式 (2) 的 j 方向方程, 二式相加, 并用质量加权平均概念, 再对该式取平均, 则:

$$\begin{aligned}
 (D/Dt)(\overline{\rho u_{ij}}) = & -\overline{u_j \overline{\partial \rho} / \partial x_i} - \overline{u_i \overline{\partial \rho} / \partial x_j} + \overline{u_j \overline{\partial \tau_{ik}} / \partial x_k} + \overline{u_i \overline{\partial \tau_{jk}} / \partial x_k} \\
 & - \overline{\rho u_{jk} \overline{\partial u_j} / \partial x_k} - \overline{\rho u_{ik} \overline{\partial u_i} / \partial x_k} - (\partial / \partial x_k)(\overline{\rho u_{ij} u_k}) + \overline{\rho u_j f_i} \\
 & + \overline{\rho u_i f_j} - \overline{\tilde{u}_i \overline{\rho f_j}} - \overline{\tilde{u}_j \overline{\rho f_i}} \quad (8)
 \end{aligned}$$

式 (8) 即是在旋转坐标系中可压湍流应力输运方程式。

式中: $\tau_{ik} = \mu \{ \partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i \} - 2/3 \mu (\partial u / \partial x_i) \delta_{ik}$ 。在方程 (8) 中, 与 Coriolis 力和离心力有关的项为:

$$\begin{aligned}
 M = & \overline{\rho u_j f_i} + \overline{\rho u_i f_j} - \overline{\tilde{u}_i \overline{\rho f_j}} - \overline{\tilde{u}_j \overline{\rho f_i}} \\
 = & \overline{u_i (\overline{\rho f_j} + \overline{\rho f_j'})} + \overline{u_j (\overline{\rho f_i} + \overline{\rho f_i'})} + \overline{\rho (u_j f_i + u_i f_j)} \\
 & + \overline{f_j \overline{\rho u_j}} + \overline{f_i \overline{\rho u_i}} + \overline{u_j \overline{\rho f_i}} + \overline{u_i \overline{\rho f_j}} \quad (9)
 \end{aligned}$$

可见, 在旋转坐标系中, 可压湍流应力输运方程中应包括以上 10 项 Coriolis 力和离心力的作用项。对不可压流动, $\rho' = 0$, $\overline{u_i} = \overline{u_i} = 0$, $\overline{u_j} = \overline{u_j} = 0$, (9) 式由原 10 项减少到下面二项:

$$M = \overline{\rho (u_j f_i + u_i f_j)} \quad (9a)$$

若 $i = j$, 则方程 (8) 变成:

$$\begin{aligned}
 (D/Dt)(1/2 \overline{\rho u_i u_i}) = & -\partial / \partial x_k \{ \overline{u_k (1/2 \rho u_i u_i)} \} - \overline{u_j \overline{\partial \rho} / \partial x_j} - \overline{u_i \overline{\partial \rho} / \partial x_i} \\
 & + \overline{u_i \overline{\partial \tau_{ik}} / \partial x_k} - \overline{\rho u_{ik} \overline{\partial u_i} / \partial x_k} + \overline{u_i (\overline{\rho f_i} + \overline{\rho f_i'})} \overline{f_i \overline{\rho u_i}} \\
 & + \overline{\rho u_i f_i} + \overline{\rho u_i f_i'} \quad (10)
 \end{aligned}$$

方程式 (10) 中的 $f_i' = -2e_{ijk} \omega u_k$, 很易证明 $\overline{u_i f_i'} = 0$, 所以式中最后一项为 0。但在方程 (9) 中还保留 4 项由 Coriolis 力和离心力引起的作用项。对不可压流, $\rho' = 0$, $\overline{u_i} = \overline{u_i} = 0$, 故最后 5 项均为 0。即不含由 Coriolis 力和离心力的作用项。

4. 旋转坐标系中可压湍流耗散率的输运方程 本文在推导耗散率的输运过程中, 凡是由旋转引起的附加项一律保留, 凡是由可压引起的附加项则尽可能保留。经复杂的运算, 最后可得旋转坐标系中可压湍流的精确形式的耗散率输运方程:

$$\begin{aligned}
 (\partial P \epsilon / \partial t) + (\partial \overline{P u_j \epsilon} / \partial x_j) = & -2(\omega / \partial x_j) \{ \overline{\delta \rho \overline{\partial \tau_{ik}} / \partial x_k} (\partial u_i / \partial x_k) \} - 2\mu (\overline{\partial u_i / \partial x_k} (\partial u_i / \partial x_k) (\partial u_j / \partial x_j) (\partial u_j / \partial x_k) \\
 & - \overline{\rho (\partial \epsilon / \partial u_j / \partial x_j)} - 2\mu \{ \overline{(\partial u_i / \partial x_k) (\partial u_j / \partial x_k) (\partial u_i / \partial x_j)} \} \\
 & - 2\mu \overline{u_j (\partial u_i / \partial x_k) (\partial \epsilon / \partial x_j) (\partial u_i / \partial x_k)} - 2\mu (\overline{\partial u_i / \partial x_k} (\partial u_i / \partial x_k) (\partial u_j / \partial x_k) \\
 & + \mu (\partial \partial x_j) (\partial \epsilon / \partial x_j) - 2\mu \{ \overline{(\partial \partial x_j) (\partial u_i / \partial x_k) (\partial \partial x_j) (\partial u_i / \partial x_k)} \} \\
 & + 2\mu (\overline{\partial u_i / \partial x_k} (\partial \epsilon / \partial x_j) + (1/P) (\partial \partial x_j) \{ \mu (\partial u_j / \partial x_i) \\
 & - 2/3 \mu (\overline{u_k / \partial x_k}) \delta_j \} - \overline{\rho \overline{\partial \tau_{ik}} / \partial x_k} - \overline{\rho \overline{\partial \tau_{jk}} / \partial x_j} \\
 & - (\overline{\rho f_j} / P) + 2\mu \{ \overline{\partial \partial x_k} (1/P) \} \{ \overline{\partial u_i / \partial x_k} (\partial \partial x_j) (\mu \partial u_i / \partial x_j) \\
 & - (\overline{\partial u_i / \partial x_k} (\partial \partial x_i) \} \quad (11)
 \end{aligned}$$

上式中 $\epsilon \equiv \nu (\partial u_i / \partial x_k) (\partial u_i / \partial x_k)$ 即为耗散率。式中 Coriolis 力和离心力的作用项为:

$$2\mu (\overline{\partial u_i / \partial x_k} (\partial \epsilon / \partial x_k))$$

三、旋转坐标系中的湍流模型

求解平均 N-S 方程时, 需要建立能反映实际情况的湍流模型一直奋斗目标。但即使是不考虑旋转, 目前还不可能建立一个普遍适用的湍流模型。旋转可以影响湍流结构, 但目前旋转坐标系中的湍流模型只能是在不考虑旋转的湍流模型的基础上加以适当修正。在封闭平均 N-S 方程求解过程中, 有一类湍流模型是基于方程 (7) 的假定, 补充一个求湍流粘性系数

μ_t 的代数方程 (O 方程模型, 即代数涡粘模型), 或补充求 μ_t 的微分方程 (一方程模型或二方程模型)。此时, 方程 (1), (2b) 包含三个分量方程, 和 (3b) 中有 p , $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{u}_3$, $\bar{p}$, T , $\tilde{T}$, μ_t 八个未知数, 再加上状态方程和滞止转子焓 l 的定义以及求 μ_t 的湍流模型方程, 方程组就封闭了。另一类湍流模型是抛弃湍流粘性系数的概念, 而直接建立湍流应力方程 (湍流应力方程模型)。此时应用方程 (1), (2a) 和 (3a) 以及 (8) 求解。

1. 代数涡粘模型 (O 方程模型): 目前在工程上获得广泛应用的是 Cebeci-Smith 模型 (C-S 模型)^[4]

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_{t\text{内}} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \right| & x_{2c} < x_{2e} \\ \mu_{t\text{外}} = 0.0168 \rho u_{1e} \delta^* / \left[1 + 5.5(x_{2l}/\delta)^6 \right] & x_{2c} > x_{2e} \end{cases} \quad (12)$$

上式中 x_2 的方向垂直于壁面, l 是混合长度。

$$l = 0.4 x_2 \left[1 - \exp\left(-\frac{\rho_{w,tw} x_{2l}}{26 \mu_w}\right) \right] \quad (13)$$

$$\delta^* = \int_0^{x_{2e}} (1 - \bar{u}_1 / u_{1e}) dx_2, \quad \tau_w = \mu_w (\partial \tilde{u}_1 / \partial x_2)_{x_{2e}}$$

x_{2e} 是边界层内、外层分界点离壁面的垂直距离, $x_{2c} \approx 10\% - 20\% \delta$, 在计算迭代过程中确定。

旋转和曲率影响湍流结构, Bradshaw 把它们归结为对混合长度 l 的影响。如果 l_0 表示无旋转、无曲率时的混合长度, l 表示有旋转有曲率时的混合长度, 文献 [5] 给出修正公式:

$$l/l_0 = 1 - \beta_\Omega R_{i\Omega} - \beta_c R_{ic} \quad (14)$$

上式中 β_Ω 和 β_c 是旋转与曲率效应的经验常数, 由实验结果确定, $\beta_\Omega = 6$, $\beta_c = 7$ (凸边) 和 $\beta_c = 4$ (凹边)。式中的 R_i 为 Richardson 数

$$R_{i\Omega} = -2\Omega / (\partial \tilde{u}_1 / \partial x_2), \quad R_{ic} = 2(\bar{u}_1 / R) / (\partial \tilde{u}_1 / \partial x_2) \quad (15)$$

式中的 R 为曲率半径, 凸边 $R > 0$, 凹边 $R < 0$ 。

有些文献对式 (12) 稍加修改, 使之不出现边界层厚度, 并应用于没有边界层概念的全部由湍流充满的流场计算中去。

笔者认为: 代数涡粘模型实用简单, 在工程应用上积累了丰富的经验, 只要结合实际计算情况进行适当修改, 可以作为一个研究途径加以探讨。

2. 二方程模型 主要讨论工程上广泛应用的 $k-\epsilon$ 模型, 其涡粘度系数的公式为:

$$\mu_t = C_\mu \bar{p} k^2 / \epsilon \quad (16)$$

C_μ 为常数。 k 和 ϵ 分别由方程 (10) 和 (11) 决定。方程 (10) 和 (11) 含有大量的各种脉动相关联量, 为了使方程封闭, 需要模拟, 用已知的或能求解的量表示。不考虑旋转因素时, 用方程 (10) 和 (11) 作为基础, 进行关联和模拟, 得出在高雷诺数下的 $k-\epsilon$ 方程为:

$$k \text{ 方程: } \left(\frac{\partial k}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (\bar{p} \tilde{u}_j k) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left[\mu_t / \sigma_k \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \right] + \mu_t \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) - \rho \epsilon \quad (17)$$

$$\epsilon \text{ 方程: } \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (\bar{p} \tilde{u}_j \epsilon) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left[\mu_t / \sigma_\epsilon \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) \right] + \epsilon / k \left[C_1 \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - C_2 \bar{p} \epsilon \right] \quad (18)$$

式中 $C_1 = 1.44$, $C_2 = 1.92$ 。在考虑有旋转的情况下, 文献 [6] 对 (17)、(18) 式进行了修正, 用修正后的湍流模型, 预测旋转矩形管道的流动, 修正后的 k , ϵ 表达方程形式为:

$$\left(\frac{\partial k}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (\bar{p} \tilde{u}_j k) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left[\mu_t / \sigma_k \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \right] + \mu_t \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) - \rho \epsilon + G_c \quad (17a)$$

$$\partial \overline{P\epsilon} / \partial t + (\partial / \partial x_j) (\overline{P u_j \epsilon}) = (\partial / \partial x_j) \{ \mu_t / \sigma_\epsilon (\partial \epsilon / \partial x_j) \} + \epsilon / k \{ C_1 \mu_t (\partial \overline{u_i} / \partial x_j + \partial \overline{u_j} / \partial x_i) - C_2 \overline{P \epsilon} \} + (\epsilon / k) G_\epsilon - \rho (\epsilon^2 / k) C_\epsilon \quad (18a)$$

G_ϵ 和 C_ϵ 采用了三种不同模型:

$$\text{模型 : } G_\epsilon = 9\omega\mu_t (\partial u_3 / \partial x_1) \quad C_\epsilon = 0$$

$$\text{模型 : } G_\epsilon = 0 \quad C_\epsilon = 0.2 (k/\epsilon)^2 \times 2\omega \{ (\partial u_3 / \partial x_1) - 2\omega \}$$

$$\text{模型 : } G_\epsilon = 0 \quad C_\epsilon = 0.2 (k/\epsilon)^2 \times 2\omega (\partial u_3 / \partial x_1)$$

计算结果表明, 三种模型比不考虑旋转影响的模型, 都不同程度地更接近实验值, 这说明这种修正是有意义的。

3. 湍流应力方程模型 湍流应力方程模型不用涡粘性系数的概念, 即不用方程 (7) 的假定, 而直接应用方程 (8) 来确定平均 N-S 方程中出现的湍流应力项 $-\overline{\rho u_i u_j}$ 。但到目前为止, 还尚未看到应用这个方程来解决实际湍流问题。文献 [7] 认为, 目前即使是超级巨型计算机的容量也是不可能解决。一个可供选择的办法是简化湍流应力偏微分方程为代数方程。

4. 代数应力方程模型 通过假设: $D \overline{u_i u_j} / Dt$ 与 $\overline{u_i u_j} / k$ 成正比, 文献 [6] 把湍流应力方程的偏微分方程形式进行简化和关联, 化成下面的代数方程形式:

$$\overline{u_i u_j} / k = 2/3 \delta_{ij} + (1 - C_2) / C_1 \{ \overline{P u_j} / \epsilon - 2/3 \delta_{ij} (\overline{P T} / \epsilon) \} / \{ 1 + (1/C_1) (\rho/\epsilon - 1) \} \quad (19)$$

$$\text{式中: } P_{ij} = -\rho \overline{u_i u_k} (\partial \overline{u_j} / \partial x_k) + \overline{u_j u_k} (\partial \overline{u_i} / \partial x_k) \}$$

$$P = -\rho \overline{u_i u_j} (\partial \overline{u_i} / \partial x_j), \quad C_1 = 1.5, C_2 = 0.6$$

文献 [8] 把上式推广到旋转流:

$$\overline{u_i u_k} / k = 2/3 \delta_{ik} + R_{ik} (1 - C_2/2F) + (P_{ik} - 2/3 \delta_{ik} P) (1 - C_2 F) \{ P + \rho \epsilon^* (CF - 1) \} - (2/3 \rho k R^{1/2} \overline{S}_{ik}) / \{ P + \rho \epsilon^* (C_1 F - 1) \} \quad (19a)$$

$$\text{式中: } \epsilon^* = \epsilon + 10/3 \omega (\partial k^{1/2} / \partial x_j) (\partial k^{1/2} / \partial x_j)$$

$$\overline{S}_{ik} = 1/2 \{ (\partial \overline{u_i} / \partial x_k) + (\partial \overline{u_k} / \partial x_i) \}$$

$$R_{ik} = -2\rho\omega(\epsilon_{ij}\overline{u_k u_j} + \epsilon_{kj}\overline{u_i u_j}), \quad R_T = k^2/\gamma\epsilon, \quad F = 1 + 2.5k^{3/2}/\epsilon(x_1 + x_2 + x_3) \}$$

5. 简化代数应力方程模型 方程 (19) 或 (19a) 虽然已把偏微分方程 (8) 变成了代数方程, 但形式上还是相当繁, 应进一步简化。文献 [9] 忽略 $\overline{u_1 u_3}$ 和 $\overline{u_2 u_3}$ 。得简化公式:

$$\overline{u_1 u_2} / k = A + \alpha R, \quad \overline{u_2 u_2} / k = B - \alpha R, \quad \overline{u_3 u_3} / k = C$$

$$\overline{u_1 u_1} / k = C_\mu (k^2/\epsilon) (\partial \overline{u_1} / \partial x_2) (1 - \gamma R - \delta R^2) \quad (20)$$

上式中 $R = -\omega / (\partial \overline{u_1} / \partial x_2)$, $\gamma = 6.5$, $\delta = 25.3$, A 、 B 、 C 、 α 、 C_μ 都是一些常数。

这里仅列出以上带有代表性的五种湍流模型。总的印象是: 湍流模型的理论远没有达到严密的程度, 往往带有很大的任意性和经验性。目前还不存在适用于任何情况下的通用湍流模型。只能针对某一特殊情况, 在总结大量实验数据的前提下, 参照前人经验, 提出适合于这一特殊情况的湍流模型。对叶轮机机械高速旋转的湍流模型的研究, 也只能遵循这一原则。

四、几点初步看法和结论

从本文推导得出的基本方程中, 可以得出下面几点结论:

1. 在旋转坐标系中, 平均量的连续方程形式没有变化; 动量方程中增加了 Coriolis 力和离心力的作用项; 能量方程中如引入滞止转子焓的概念, 则在形式上也没有变化。

2. 旋转坐标系的可压湍流应力输运方程中, Coriolis 力和离心力的作用项共 10 项。对不可压湍流, 则减少为 2 项。因此在湍流应力封闭方程中要引入 Coriolis 力和离心力作用的修正项。

3. 旋转坐标系中可压湍流脉动平均动能方程 (即 k 方程) 中, Coriolis 力和离心力的作用项为 4 项。对不可压湍流, k 方程中不含 Coriolis 力和离心力的作用项。

4. 旋转坐标系中可压湍流的耗散率输运方程 (即 ϵ 方程) 中含有 Coriolis 力和离心力的作用项。对不可压湍流, 除非 $\omega = \omega_z = 0$, 否则也包含 Coriolis 力和离心力的作用项 (这可以展开 $\overline{\partial u^i / \partial x_j} / \overline{\partial f^i / \partial x_j}$ 而得到这个结论)。

从本文引出的 5 个湍流模型来看, 可得出如下几点初步看法:

1. 湍流模型的建立正处在发展阶段, 尚不存在通用模型。
2. 代数涡轮模型实用简单, 积累了丰富经验数据。可用来预测流场, 调试计算机程序。
3. $k-\epsilon$ 模型也可采用, 但旋转影响的修正, 必须建立在实验数据上。
4. 简化的代数应力模型是大有前途的模型, 应作为今后工作的方向和重点。
5. 湍流应力模型和代数应力模型如不简化, 还不能达到实用阶段。

参 考 文 献

- [1] Koyama, H., "Stabilizing and Destabilizing Effects of Coriolis Force on Two-Dimensional Laminar and Turbulent Boundary Layers", Trans. ASME, J. of Engineering for Power, Vol. 101, No. 1, 1979.
- [2] 苏健、汪庆桓, "旋转坐标系中湍流模型的研究", 中国工程热物理学会 1989 年年会论文。
- [3] 华耀南、王保国, "有旋转效应和流片厚度变化的叶轮机械边界层的积分方程求解法", 工程热物理学报, Vol. 9, No. 4, 1988 年。
- [4] Cebei, T. et al, "A General Method for Calculating 3D Compressible Laminar and Turbulent Bondary Layers on Arbitrary Wings", NASA CR 2777, 1977.
- [5] Bradshaw, P., "The Analogy between Streamline Curvature and Buoyancy in Turbulent Shear Flow", Trans. ASME, J. of Fluid Mechanics, Vol. 36, Part 1, pp. 177-191, 1969.
- [6] Rodi, W., "A New Algebraic Relation for Calculating Reynolds Stresses", Zeitschrift Fuer Angewandte Mathematik and Mechanik, Vol. 56, p. 219, 1976.
- [7] Lakshminarayana, B., "Turbulence Modeling for Complex Shear Flows", AIAA J., Vol. 24, No. 12, 1986.
- [8] Galmes, J., "Turbulence Modeling for 3D Shear Flows over Curved Rotating Bodies", AIAA J. Vol. 22, Oct., 1984.

THE GOVERNING EQUATIONS AND TURBULENCE MODELS OF COMPRESSIBLE TURBULENT FLOW IN A ROTATING FRAME

Hua Yaonan (*Academia Energetics R & D Center*)

ABSTRACT

The governing of equations compressible turbulent flow in the rotating frame are established by the aid of the mass weighted average method. The transport equations for the turbulent stresses, the turbulent kinetic energy and the dissipation rates are derived from the obtained equations. The form of these equations set up in a rotating frame is different from that in an ordinary inertia reference system. The rotating effects caused by Coriolis and the centrifugal forces result in the appearance of the additional items in these equations. They may not be ignored in solving the Navier-Stokes equations and studying the turbulence models. Five turbulent models and their mathematical expressions are considered, and their revised forms taking account of the rotating effects are discussed.

EXPERIMENTAL RESEARCH ON DISTORTION TOLERANCE CAPACITY OF A TWIN-SPOOL TURBOJET

Wu Yuegeng, Yun Qisheng, Ge Guohuang

(*Li Yang Aeroengine Research Institute*)

ABSTRACT

The inlet pressure distortion experiments of a twin-spool turbojet were completed at the ground test-rig. Under a variety of conditions of the inlet circumferential and radial pressure distortion, the distorting flow field, distorting index, critical distorting angle and sensitivity have been measured separately by the steady and dynamic measuring systems. Meanwhile, the emphasis was placed on analysing the effect of inlet circumferential and radial pressure distortions on the performance and reliability of the twin-spool turbojet, the results of the analysis provide the experimental basis for matching between the engine and its intake.

ROTATING STALL AND SURGE IN AXIAL FLOW COMPRESSOR

Tang Diyi, Guo Jie, Li Lijun, Qiao Weiyang

(*Northwestern Polytechnical University*)

ABSTRACT

Supported by the funds of the national natural science, we have tested and measured the instability behavior of compressors in detail with hot-wire, hot-film probes and transient pressure 3-hole probes on single rotor, single stage and multi-stage compressors respectively. After analyzing signals with the power spectra and correlation analysis, it is found that there are two kinds of disturbances—peripheric oscillation and axial oscillation in the flow. On the basis of this fact, we propose the concept that the flow separation from airfoils results in peripheric oscillation and axial oscillation simultaneously, and provide a new model to describe the flow destabilizing mechanism.

For the stability problem of multistage axial flow compressors, it is of practical value to investigate its stability limits, inclusive of the rotating stall margin. The preliminary results of this investigation show that the stability limit in the high speed region is equivalent to a surge line, that the stability limit in the middle speed region is indeed a stall line, and that the stability limit in the low speed region has two branches, one is the stall line of the whole compressor, the other is the rotating stall inception margin of the first stage. Both are of the same importance from the viewpoint of engine safety. Finally the mathematical methods for predicting the stability limits are discussed.